Analiza zespolona
Lista 2

Zad 1. Znaleźć $|z|$ oraz $arg\, z$, gdy:

a) $z = (1 + i)(2 + i)(3 + i)$,

b) $z = e^{i\varphi} + 1$, $\varphi \in (-\pi.\pi)$.

Zad 2. Wyznaczyć parametryczne równanie:

a) prostej przechodzącej przez punkty odpowiadające liczbom zespolonym z_1, z_2,

b) okręgu o środku z_0 i promieniu r.

Zad 3. Znaleźć warunek na to by proste $z(t) = z_1 + a_1 t$ i $z(t) = z_2 + a_2 t$ były:

a) równoległe, b) prostopadłe.

Zad 4. Udowodnić, że jeżeli $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$, to $\lim_{n\to\infty} |z_n| = |z_0|$. Czy zachodzi implikacja odwrotna?

Zad 5. Dla jakich punktów (a_0, b_0) ciąg punktów (a_n, b_n) zdefiniowany rekurencyjnie wzorem

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) := (a_n^2 - b_n^2, 2a_n b_n), \qquad n \in \mathbb{N}$$

jest zbieżny na płaszczyźnie euklidesowej?

Zad 6. Dla jakich $z \in \mathbb{C}$ ciąg $z_n = z^n$ jest zbieżny ?

Zad 7. Wyznaczyć obraz kwadratu o wierzchołkach w punktach $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = 1 + i$, $z_4 = i$, przy odwzorowaniu:

a) $f(z) = iz$, c) $f(z) = 2iz + i$,

b) $f(z) = 2iz$, d) $f(z) = z^2$.

Zad 8. Przy odwzorowaniu $f(z) = \frac{1}{z}$ wyznaczyć obraz zbioru

a) $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| \leq 2,\ arg\, z \in [0, \pi)\}$,

b) $B = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq 1,\ |z - \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{2}\}$,

c) $C = \{z(t) = t + \frac{1}{2}i : t \in \mathbb{R}\}$.